7. COORDENADAS Y CAMBIOS DE BASE

7.1. COORDENADAS DE UN VECTOR

Si $B = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$ es una base del espacio o subespacio S, entonces B es conjunto generador de S, por tanto para todo vector $\boldsymbol{x} \in S$ el sistema vectorial

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u_1} + x_2\boldsymbol{u_2} + \dots + x_n\boldsymbol{u_n}$$

es compatible. Además, como B es linealmente independiente, el rango de la matriz de coeficientes es n, y el sistema es determinado. Se deduce que para todo vector $\boldsymbol{x} \in S$, existe una única solución del sistema vectorial anterior, y por tanto a cada vector $\boldsymbol{x} \in S$ se le puede asignar de manera única las soluciones de dicho sistema. Este resultado proporciona la siguiente definición:

DEFINICIÓN

Dada una base $B = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$ del espacio o subespacio S, para todo vector $\boldsymbol{x} \in S$ se llaman **coordenadas** del vector $\boldsymbol{x}$ en la base B a los valores $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ que hacen que sea cierta la igualdad

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u_1} + x_2\boldsymbol{u_2} + \dots + x_n\boldsymbol{u_n}$$

Y se escribe como notación, que $\boldsymbol{x_B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

EJEMPLO 9

Calcular las coordenadas del vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$: $B_c^2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Solución:

Para calcular las coordenadas de $\boldsymbol{x}$ en la base B_c^2 se resuelve el sistema vectorial:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$